

अनुक्रमांक

नाम

131

324(AX)

2023

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट ]

[ पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
  - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
  - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
  - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
  - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
  - जो प्रश्न न आती हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all *nine* questions in this question paper.
- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question which you cannot solve.



- b) The value of  $\int \cos^2 x dx$  will be
- i)  $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$       ii)  $\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \sin 2x + c$
- iii)  $\cos^2 x - \sin^2 x + c$       iv)  $2 \cos x \sin x + \frac{x}{2} + c$       1
- c) The angle between the vectors  $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$  and  $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  will be
- i)  $90^\circ$       ii)  $60^\circ$
- iii)  $30^\circ$       iv)  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$       1
- d) If the numbers of elements of two finite sets  $A$  and  $B$  are  $m$  and  $n$  respectively, then total number of relations from  $A$  to  $B$  will be
- i)  $2^{m+n}$       ii)  $2^{mn}$
- iii)  $m \times n$       iv)  $m + n$       1
- e) If  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$  then the function from  $A$  to  $B$  will be
- i)  $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$
- ii)  $\{(1, 3), (2, 4)\}$
- iii)  $\{(1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$
- iv)  $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$       1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{यदि } x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$   $x = 2$  पर संतत फलन है।      1
- ख) वक्रों के परिवार  $y = a \sin(x + b)$  जिसमें  $a$  और  $b$  स्वेच्छ अचर हैं, का अवकल समीकरण को ज्ञात कीजिए।      1
- ग) सिद्ध कीजिए कि  $f(1) = f(2) = 1$  तथा  $x > 2$  के लिए  $f(x) = x - 1$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: N \rightarrow N$  आच्छादक तो है परन्तु एकैकी नहीं है।      1
- घ) यदि  $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$  और  $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{2}{5}$ , तो  $P(A \cup B)$  ज्ञात कीजिए।      1
- ङ) असमिका  $8x + 4 < 7x + 8$  को हल कीजिए।      1

324(AX)

2. Do all the parts of the following :

a) Prove that the function  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{if } x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{if } x > 2 \end{cases}$  is continuous. 1

function at  $x = 2$ .

b) Find the differential equation of the family of curves  $y = a \sin(x + b)$ , where  $a$  and  $b$  are arbitrary constants. 1

c) Prove that the function  $f: N \rightarrow N$  defined by  $f(x) = x - 1$ , when  $x > 2$  and  $f(1) = f(2) = 1$  is onto but it is not one-one. 1

d) If  $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$  and  $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{2}{5}$ , then find  $P(A \cup B)$ . 1

e) Solve the inequality  $8x + 4 < 7x + 8$ . 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) बिन्दुओं  $(2, -5, 1)$  तथा  $(1, 4, -6)$  को मिलाने वाली रेखा पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो उस रेखा को  $2 : 3$  के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है। 2

ख) यदि  $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$  और  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ , तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी दो भुजाओं को  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  से प्रदर्शित किया गया है। 2

ग) यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$ . 2

घ) पूर्णाकों 1 से 11 के में से दो पूर्णांक यादृच्छया चुने जाते हैं। यदि उनका योग सम है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पूर्णांक विषम हैं। 2

3. Do all the parts of the following :

a) Find the coordinates of the point which divides the line joining the points  $(2, -5, 1)$  and  $(1, 4, -6)$  internally in the ratio  $2 : 3$ . 2

b) Find the area of the triangle whose two sides are represented by  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  if  $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$  and  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ . 2

c) If  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , prove that  $A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$ . 2

d) Two integers among 1 to 11 are selected at random. If their sum is even, then find the probability that both integers are odd. 2

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि  $f:R \rightarrow R$ , जहाँ  $f(x)=\sin x$  और  $g:R \rightarrow R$  जहाँ  $g(x)=x^2$ , तो  $f(x)$  तथा  $g(x)$  का परिसर ज्ञात कीजिए। 2

ख) यदि  $P(A)=\frac{1}{2}$ ,  $P(B)=\frac{1}{3}$  तथा  $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$  हों, तो सिद्ध कीजिए कि घटनाएँ  $A$  तथा  $B$  स्वतंत्र हैं। 2

ग) यदि  $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ,  $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$  और  $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$  इस प्रकार है कि  $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  पर लम्ब है, तो  $\lambda$  का मान ज्ञात कीजिए। 2

घ) अवकल समीकरण  $(x-y)dy-(x+y)dx=0$  को हल कीजिए। 2

4. Do all the parts of the following :

a) If  $f:R \rightarrow R$ , where  $f(x)=\sin x$  and  $g:R \rightarrow R$ , where  $g(x)=x^2$ , then find the range of  $f(x)$  and  $g(x)$ . 2

b) If  $P(A)=\frac{1}{2}$ ,  $P(B)=\frac{1}{3}$  and  $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$ , prove that the events  $A$  and  $B$  are independent. 2

c) If  $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ,  $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$  and  $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$  are such that  $\vec{a}+\lambda\vec{b}$  is perpendicular to  $\vec{c}$ , then find the value of  $\lambda$ . 2

d) Solve the differential equation  $(x-y)dy-(x+y)dx=0$ . 2

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए :  $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$ . 5

ख) यदि  $f(x)=x+\frac{1}{x}$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $[f(x)]^3=f(x^3)+3f\left(\frac{1}{x}\right)$ . 5

ग)  $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$  का  $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$  के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 5

घ) बिन्दुओं  $-2\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k}$ ,  $-3\hat{i}+10\hat{j}-9\hat{k}$  और  $-5\hat{i}-6\hat{j}-6\hat{k}$  से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

ङ) वक्र  $x^{2/3}+y^{2/3}=2$  के बिन्दु  $(1, 1)$  पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

5. Do all parts of the following :

a) Prove :  $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$  5

b) If  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , prove that  $[f(x)]^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$ . 5

c) Find the differential coefficient of  $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$  with respect to  $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ . 5

d) Find the equation to the plane passing through the points  $-2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$ ,  $-3\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k}$  and  $-5\hat{i} - 6\hat{j} - 6\hat{k}$ . 5

e) Find the equation of normal at the point (1, 1) of the curve  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ . 5

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि दो पास एक साथ फेंके जा रहे हैं, तो कम से कम एक 6 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

ख)  $\int \frac{\sec^2 2x dx}{(\cot x - \tan x)^2}$  का मान ज्ञात कीजिए। 5

ग) अगर एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक (1, 5, -1), (0, 4, -2) और (2, 3, 4) हैं, तो इसके शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। 5

घ)  $\int_a^b x^2 dx$  का योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन की सहायता से मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) रेखाओं  $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$  तथा  $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$  के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

6. Do all the parts of the following :
- a) . If two dice are thrown together, then find the probability of getting at least one 6. 5
- b) Evaluate :  $\int \frac{\sec^2 2x dx}{(\cot x - \tan x)^2}$ . 5
- c) If the coordinates of mid-points of the sides of a triangle are  $(1, 5, -1)$ ,  $(0, 4, -2)$  and  $(2, 3, 4)$  then find the coordinates of its vertices. 5
- d) Find the value of  $\int_a^b x^2 dx$  with the help of definite integral as the limit of a sum 5
- e) Find the shortest distance between the lines  
 $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$  and  $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ . 5
7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :
- क) समीकरण निकाय  $3x - 2y + 3z = 8$ ,  $2x + y - z = 1$  तथा  $4x - 3y + 2z = 4$  को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8
- ख) अवकल समीकरण  $(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx$  को हल कीजिए। 8
7. Do any one part of the following :
- a) Solve the following system of equations by matrix method :  
 $3x - 2y + 3z = 8$ ,  $2x + y - z = 1$  and  $4x - 3y + 2z = 4$ . 8
- b) Solve the differential equation  $(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx$ . 8
8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :
- क)  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। 8
- ख) i)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। 4
- ii) यदि वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  का अभिलम्ब  $x$ -अक्ष से  $\theta$  कोण बनाए तो सिद्ध कीजिए कि अभिलम्ब का समीकरण  $y \cos \theta - x \sin \theta = a \cos 2\theta$  है। 4

8. Do any one part of the following :

a) Evaluate :  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ . 8

b) i) Evaluate :  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}} dx$ . 4

ii) If the normal of the curve  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  makes an angle  $\theta$  with  $x$ -axis, prove that the equation of the normal is  $y \cos \theta - x \sin \theta = a \cos 2\theta$ . 4

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए :

$$x + 3y \leq 60, \quad x + y \geq 10.$$

$$x \leq y, \quad x \geq 0 \text{ और } y \geq 0$$

$Z = 3x + 9y$  का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) प्रारंभिक रूपान्तरणों के द्वारा आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 8

9. Do any one part of the following :

a) Solve the following linear programming problem by graphical method, under the following constraints :

$$x + 3y \leq 60, \quad x + y \geq 10.$$

$$x \leq y, \quad x \geq 0 \text{ and } y \geq 0$$

Find the minimum and maximum values of  $Z = 3x + 9y$ . 8

b) Find the inverse of the matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  by elementary transformations. 8

324(AK) - 1,15,000